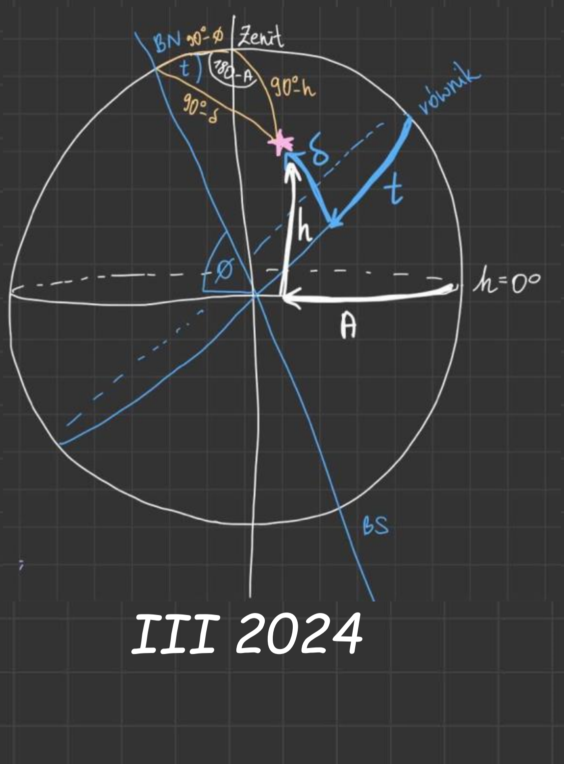
Zadania przygotowawcze do

Olimpiady Astronomicznej

Astronomia Sferyczna



III 2024

ZAD.

Ile tarcz Saturna trzeba ustawić jedna nad drugą, aby pokryły łuk na niebie horyzont - zenit?
(zał. średnica tarczy Saturna 20'')

Odp. od horyzontu do zenitu jest 90°,

$$90 : \frac{20}{3600} = 90 \cdot \frac{\overset{180}{\cancel{3600}}}{\cancel{20}} = 90 \cdot 180 = \underline{\underline{16\,200}}$$

240. Ile razy większy jest łuk równy 20° (na kole wielkim) na Jowiszu niż na Ziemi?

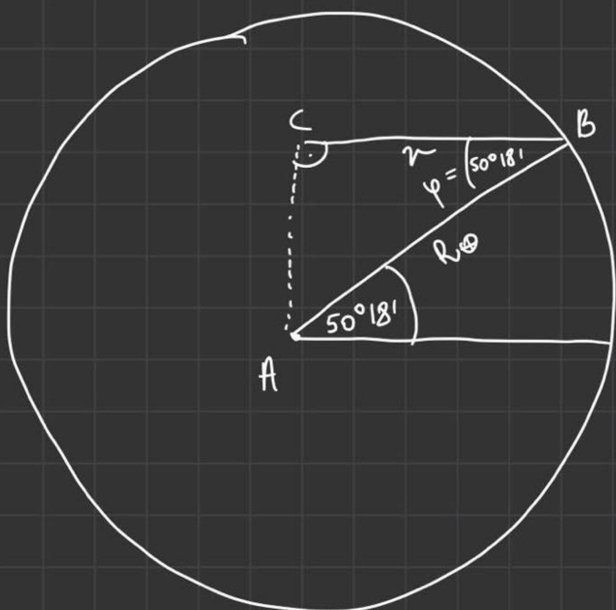
na Jowiszu $\quad l_J = 2\pi R_J \cdot \frac{20}{360} = 2\pi\, 69911\, \frac{20}{360}$

na Ziemi $\quad l_\oplus = 2\pi R_\oplus \frac{20}{360} = 2\pi \cdot 6371 \cdot \frac{20}{360}$

$$\frac{l_J}{l_\oplus} = \frac{\cancel{2\pi}\, 69911\, \frac{\cancel{20}}{360}}{\cancel{2\pi} \cdot 6371 \cdot \frac{\cancel{20}}{360}} = 10{,}9733 = 11 \text{ razy}$$

dł. łuku proporcjonalna do promieni, wystarczy policzyć stosunek promieni.

2AD. Obliczyć długość łuku 15° na równoleżniku Chorzowa ($\varphi = 50°18'$ N)



Odp. $50°18' = 50° + \frac{18}{60}° = 50,3° = \varphi$, $R_\oplus = 6371$ km

Najpierw trzeba policzyć mały promień r odpowiadający równoleżnikowi 50,3° N, korzystając z $\triangle ABC$.

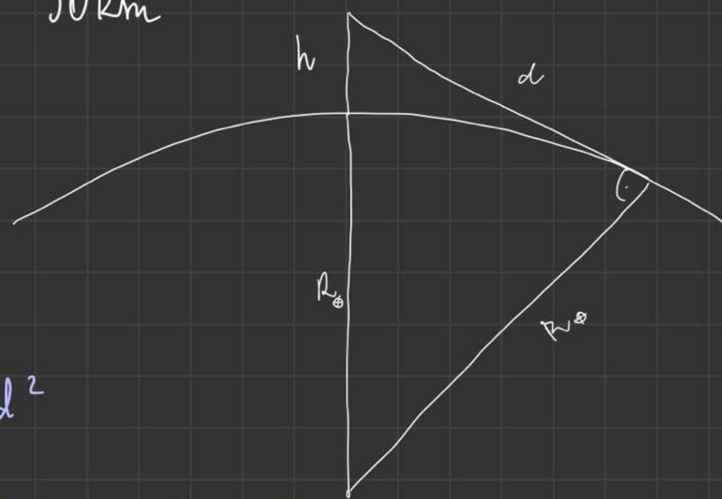
$$\cos(\varphi) = \frac{r}{R_\oplus} \Rightarrow r = R_\oplus \cdot \cos\varphi = 6371 \text{ km} \cdot \cos(50,3°)$$

$$= 4069,59 \text{ km}$$

długość łuku to $l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360} = 2\pi \cdot 4069,59 \cdot \frac{15}{360}$

$$= 1065,42 \approx \underline{\underline{1065 \text{ km}}}$$

ZAD. Na jakiej wysokości musi znajdować się obserwator w Krakowie, żeby widzieć Chorzów? Odległość Kraków - Chorzów to 90 km



Odp. $d = 90\,km$

$R_\oplus = 6371\,km$

$h = ?$

$$(h + R_\oplus)^2 = R_\oplus^2 + d^2$$

$$d^2 = (h+R_\oplus)^2 - R_\oplus^2 = h^2 + 2hR_\oplus + R_\oplus^2 - R_\oplus^2$$

$$d^2 = h^2 + 2hR_\oplus$$

$$h^2 + 2hR_\oplus - d^2 = 0$$

równanie kwadratowe ze względu na h

$$\Delta = (2R_\oplus)^2 + 4 \cdot 1 \cdot d^2 = 4R_\oplus^2 + 4d^2 = 4(R_\oplus^2 + d^2)$$

$$h = \frac{-2R_\oplus \pm \sqrt{4(R_\oplus^2 + d^2)}}{2}$$ (odrzucić ujemny wynik)

$$h = \frac{-\cancel{2} \cdot 6371 + \cancel{2}\sqrt{(6371^2 + 90^2)}}{\cancel{2}}$$

$$= -6371 + \sqrt{(6371^2 + 90^2)}$$

$$= -6371 + \sqrt{40597741}$$

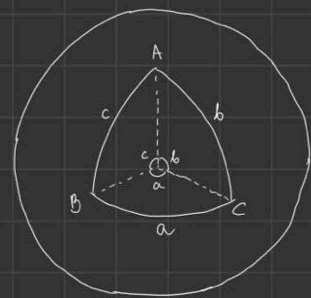
$$= -6371 + 6371{,}64$$

$$= \underline{\underline{0.64\,km}}$$

ZAD. Oblicz ortodromę dla San Francisco i Johannesburg

Odp. Trzeba skorzystać z tw. cosinusów dla trójkąta sferycznego o bokach a, b, c i kątach A, B, C.

$$\begin{cases} \cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A) \\ \cos(A) = -\cos(B)\cos(C) + \sin(B)\sin(C)\cos(a) \end{cases}$$



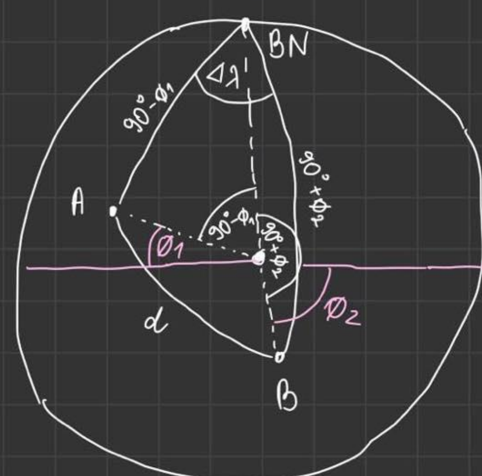
oznaczenia: San Francisco A, ϕ_1, λ_1

Johannesburg B, ϕ_2, λ_2

San Francisco: 38° N, 122° W

Johannesburg: 26° S, 28° E

$\Delta\lambda = 122° + 28° = 150°$ (ponieważ leżą po dwóch stronach południka 0°).



ortodroma to najkrótsza odległość na sferze - po kole wielkim.

$$\cos(d) = \cos(90°+\phi_2)\cos(90°-\phi_1) + \sin(90°+\phi_2)\sin(90°-\phi_1)\cos(\Delta\lambda)$$

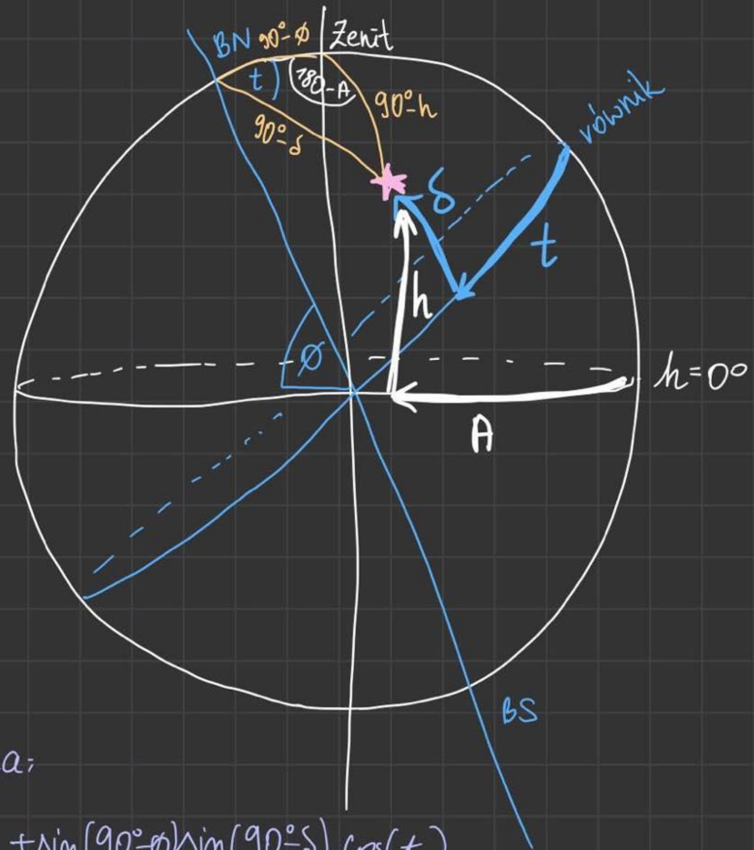
$$\cos(d) = \cos(116°)\cos(52°) + \sin(116°)\sin(52°)\cos(150°)$$

$$d = 152°$$

Żeby policzyć odległość na kuli ziemskiej można skorzystać z proporcji:

$$\begin{aligned} 152° &- 360° \\ x &- 2\pi R_{\oplus} \end{aligned} \qquad x = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371 \cdot 152}{360} = 16\,901 \text{ km}$$

ZAD. Oblicz współrzędne godzinne obiektu o $h = 30°$ i $A = 45°$ dla $\phi = 20°$.



Odp. cel: t i δ

korzystając z żółtego trójkąta:

$$\cos(90°-h) = \cos(90°-\phi)\cos(90°-\delta) + \sin(90°-\phi)\sin(90°-\delta)\cos(t)$$

$$\sin(h) = \sin(\phi)\sin(\delta) + \cos(\phi)\cos(\delta)\cos(t)$$

$$\cos(t) = \frac{\sin(h) - \sin(\phi)\sin(\delta)}{\cos(\phi)\cos(\delta)}$$

oraz:

$$\cos(90°-\delta) = \cos(90°-\phi)\cos(90°-h) + \sin(90°-\phi)\sin(90°-h)\cos(180°-A)$$

$$\sin(\delta) = \sin(\phi)\sin(h) + \cos(\phi)\cos(h)(-\cos(A))$$

Podstawiając wartości

$$\sin(\delta) = \sin(20°)\sin(30°) - \cos(20°)\cos(30°)\cos(45°)$$

$$\delta = -24°$$

$$\cos(t) = \frac{\sin(30°) - \sin(20°)\sin(-24°)}{\cos(20°)\cos(-24°)}$$

$$t = 42°$$

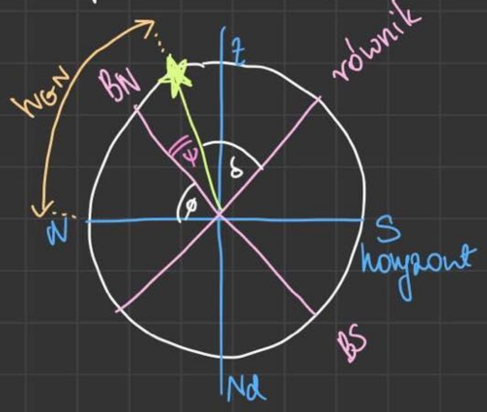
ZAD Przejście obiektów niebieskich przez lokalny południk.

Wyprowadź wzory na kulminację górną i dolną gwiazdy o podanej deklinacji δ i na danej szerokości geograficznej ϕ. Wykonaj rysunki następujących gwiazd: nigdy niewschodzących, nigdy niezachodzących oraz wschodzących i zachodzących.

Odp. Gwiazda góruje, gdy przechodzi przez lokalny południk i jej kąt godzinny $t = 0h$, osiąga wtedy najwyższą wysokość nad horyzontem.

Gwiazda dołuje, gdy przechodzi przez lokalny południk i jej kąt godzinny $t = 12h$, osiąga wtedy najniższą wysokość nad horyzontem.

– górowanie północne (na północ od zenitu) h_{GN}



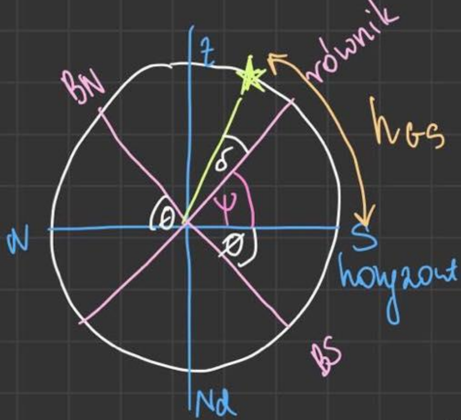
$\psi = 90° - \delta$

$h_{GN} = \phi + \psi = \phi + 90° - \delta$

*

*

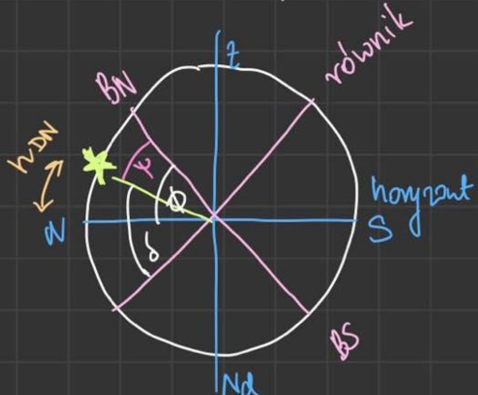
- górowanie południowe (na południe od zenitu) h_{GS}



$\psi = 90° - \phi$

$h_{GS} = \psi + \delta = 90° - \phi + \delta$

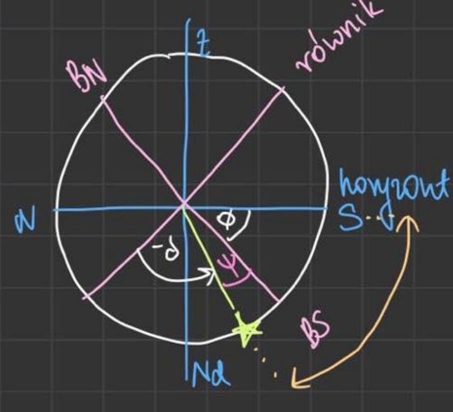
- dołowanie północne (na północ od nadiru) h_{DN}



$\psi = 90° - \delta$

$h_{DN} = \phi - \psi = \phi - (90° - \delta) = \phi + \delta - 90°$

- dołowanie południowe (na południe od nadiru)



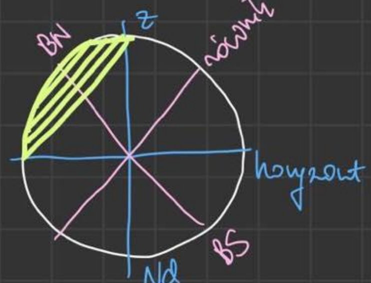
$\psi = 90° - (-\delta)$

$h_{DS} = -(\phi + (90° + \delta)) = -90° - \delta - \phi$

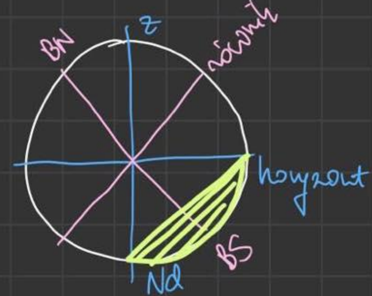
wysokość jest ujemna, bo jest pod horyzontem. Deklinacja δ jest ujemna, bo jest mierzona do BS.

**

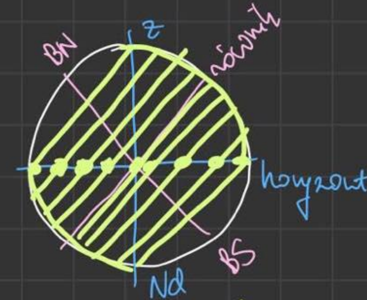
**



gwiazdy
nigdy niezachodzące



gwiazdy
nigdy niewschodzące

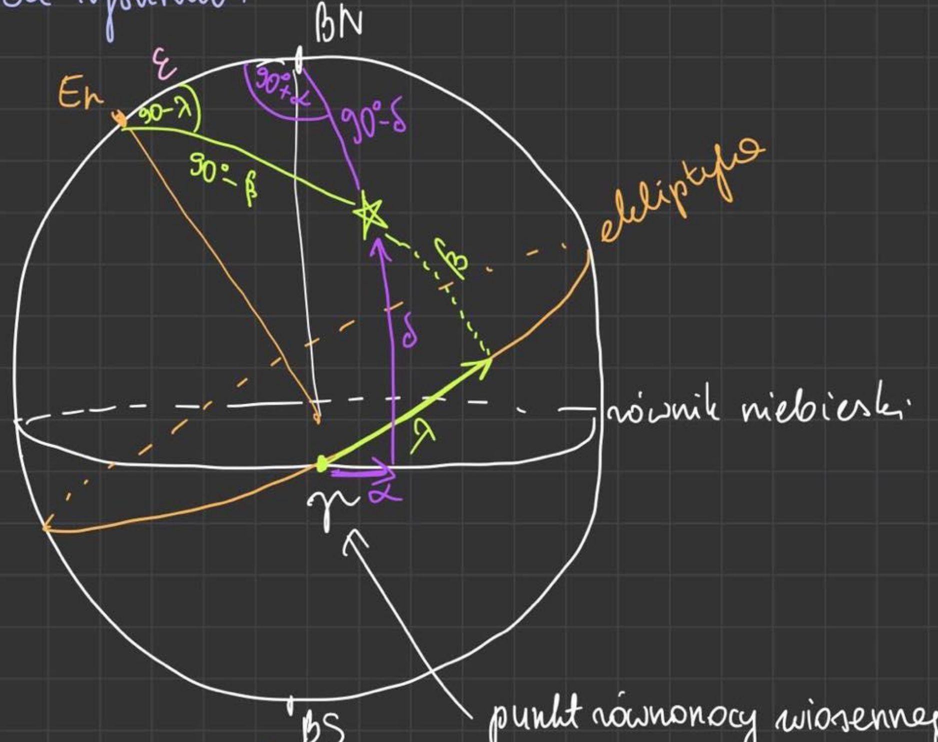


gwiazdy
wschodzące
i zachodzące

ZAD.

Wyprowadź wzory na przeliczenie współrzędnych ekliptycznych na równikowe i odwrotnie.

Odp. Zaczynamy od rysunku:



Tworzymy trójkąt paralaktyczny o następujących wierzchołkach: północny biegun niebieski, północny biegun ekliptyczny, wybrany obiekt. Fragment między biegunami jest równy nachyleniu ekliptyki względem równika niebieskiego. Pozostałe boki to dopełnienia do 90°: deklinacji δ i szerokości ekliptycznej β. Kąt przy biegunie ekliptycznym to dopełnienie do 90° długości ekliptycznej λ, a kąt przy biegunie niebieskim to rektascensja powiększona o 90°.

*

*

Tw. cosinusów do wyznaczenia β:

$$\cos(90^\circ - \beta) = \cos(\varepsilon)\cos(90^\circ - \delta) + \sin(\varepsilon)\sin(90^\circ - \delta)\cos(90^\circ + \alpha)$$

$$\sin(\beta) = \cos(\varepsilon)\sin(\delta) - \sin(\varepsilon)\cos(\delta)\sin(\alpha)$$

następnie wyliczamy λ, korzystając ze współrzędnej β.

$$\frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(90^\circ - \lambda)} = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(90^\circ + \alpha)}$$

$$\cos(\delta)\cos(\alpha) = \cos(\beta)\cos(\lambda)$$

$$\cos(\lambda) = \frac{\cos(\delta)\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}$$

odwrotne przejście

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(\varepsilon)\cos(90^\circ - \beta) + \sin(\varepsilon)\sin(90^\circ - \beta)\cos(90^\circ - \lambda)$$

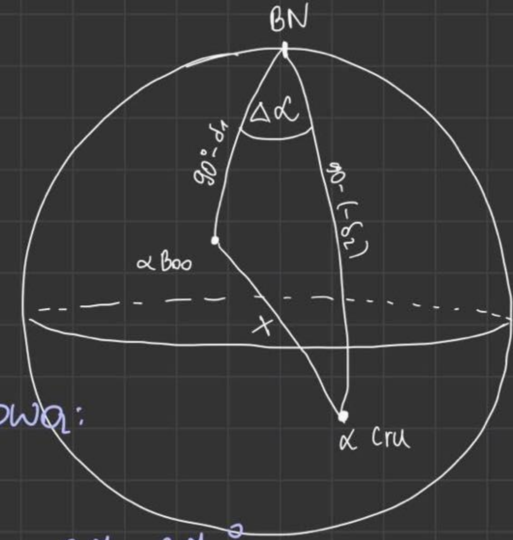
mając δ, liczymy wzór dla α:

$$\cos(90^\circ - \beta) = \cos(\varepsilon)\cos(90^\circ - \delta) + \sin(\varepsilon)\sin(90^\circ - \delta)\cos(90^\circ + \alpha)$$

$$\frac{-\sin(\beta) + \cos(\varepsilon)\sin(\delta)}{\sin(\varepsilon)\cos(\delta)} = \sin\alpha$$

2AD.

Obliczyć odległość kątową wzdłuż koła wielkiego między gwiazdami: Arktur (α Boo) $\alpha_1 = 14^h 15^m 40^s$, $\delta_1 = +19^\circ 10' 57''$, a Arcrux ($\alpha$ Cru) $\alpha_2 = 12^h 26^m 36^s$, $\delta_2 = -63^\circ 05' 57''$.



Odp. $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

$= 14^h 15^m 40^s - 12^h 26^m 36^s$

$= 1^h 49^m 04^s$

należy zamienić miarę godzinową na kątową:
$(1h = 15^\circ)$

$$\Delta\alpha = 1^h 49^m 04^s = \left(1 + \frac{49}{60} + \frac{04}{3600}\right) \cdot 15 = 27,27$$

następnie zamieniamy minuty i sekundy kątowe na ułamki stopnia:
$(1^\circ = 60' = 3600'')$

$$\delta_1 = 19^\circ + \frac{10}{60}^\circ + \frac{57}{3600}^\circ = +19,18^\circ$$

$$\delta_2 = -\left(63^\circ + \frac{5}{60}^\circ + \frac{57}{3600}^\circ\right) = -63,10^\circ$$

korzystamy z prawa cosinusów dla trójkąta sferycznego:

$$\cos(x) = \cos(90^\circ - \delta_1)\cos(90^\circ - (-\delta_2)) + \sin(90^\circ - \delta_1)\sin(90^\circ - (-\delta_2))\cos(\Delta\alpha)$$

$$\cos(x) = \sin(\delta_1)(-\sin(\delta_2)) + \cos(\delta_1)\cos(\delta_2)\cos(\Delta\alpha)$$

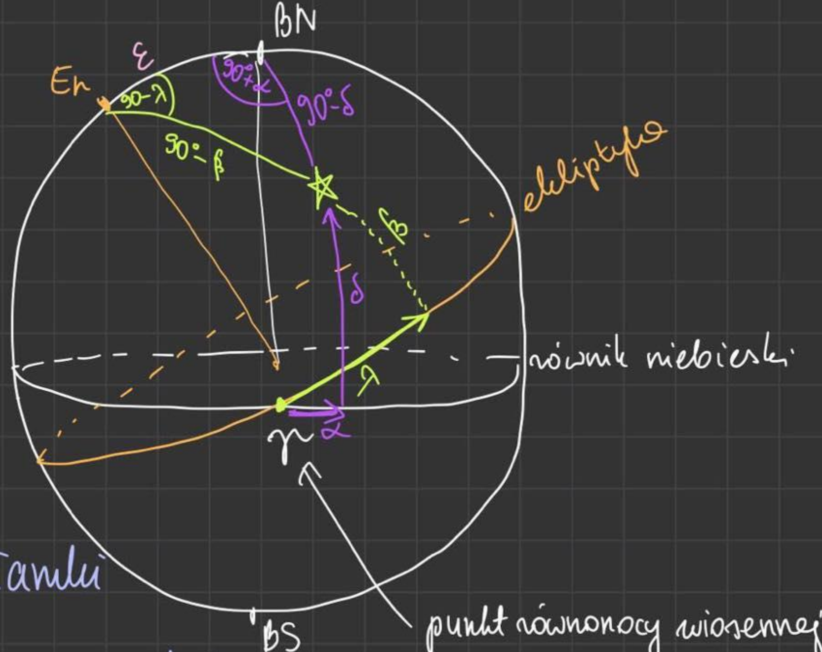
$$x = 85^\circ$$

ZAD.
Oblicz długość i szerokość ekliptyczną gwiazdy α Leonis ($\alpha = 10^h 06^m 34^s$, $\delta = +12°8'3''$, $\varepsilon = 23°26'37''$).

Odp.

Rysujemy trójkąt paralaktyczny.

Korzystamy z przekształceń z poprzedniego zadania.



Przekształcamy minuty i sekundy kątowe na ułamki stopnia, oraz miarę godzinową na kątową.

$$\alpha = \left(10 + \frac{6}{60} + \frac{34}{3600}\right) \cdot 15° = 151,642°$$

$$\delta = 12° + \frac{8}{60}° + \frac{3}{3600}° = 12,1342°; \quad \varepsilon = 23 + \frac{26}{60} + \frac{37}{3600} = 23,4436°$$

$$\sin(\beta) = \cos(\varepsilon)\sin(\delta) - \sin(\varepsilon)\cos(\delta)\sin(\alpha)$$

$$\beta = 0,464313° = 0°27'52''$$

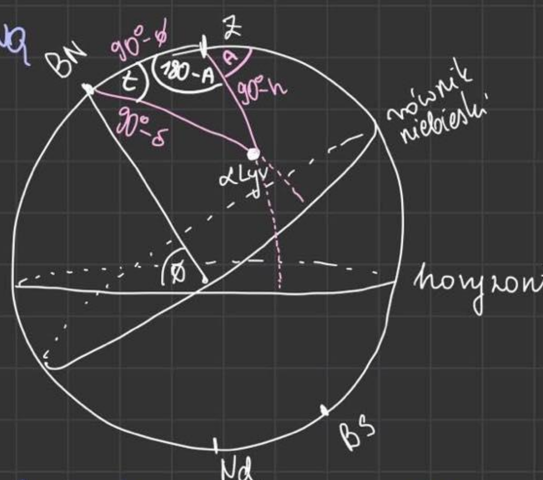
$$\cos(\lambda) = \frac{\cos(\delta)\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}$$

$$\lambda = 149°21'26''.$$

2AD

Oblicz odległość zenitalną i azymut gwiazdy Wega (α Lyr) w Chorzowie ($\phi = 50°18'20''$ N) dla kąta godzinnego $t = 16^h 30^m 15^s$ ($\delta = +38°47'$).

Odp. Zamieniamy miarę godzinną na kątową oraz minuty i sekundy kątowe na ułamki stopnia:



$$t = \left(16 + \frac{30}{60} + \frac{15}{3600}\right)\cdot 15° = 247{,}56°$$

$$\phi = 50° + \frac{18}{60}° + \frac{20}{3600}° = 50{,}3°$$

$$\delta = 38° + \frac{47}{60}° = 38{,}78°$$

odległość zenitalna $z = 90° - h$, azymut jest oznaczony jako A.

Korzystając z prawa cosinusów trójkąta sferycznego.

$$\cos(90°-h) = \cos(90°-\phi)\cos(90°-\delta) + \sin(90°-\phi)\sin(90°-\delta)\cos(t)$$

$$\underline{\underline{90°-h = 73{,}03°}}$$

$$\cos(90°-\delta) = \cos(90°-\phi)\cos(90°-h) + \sin(90°-\phi)\sin(90°-h)\cos(180°-A)$$

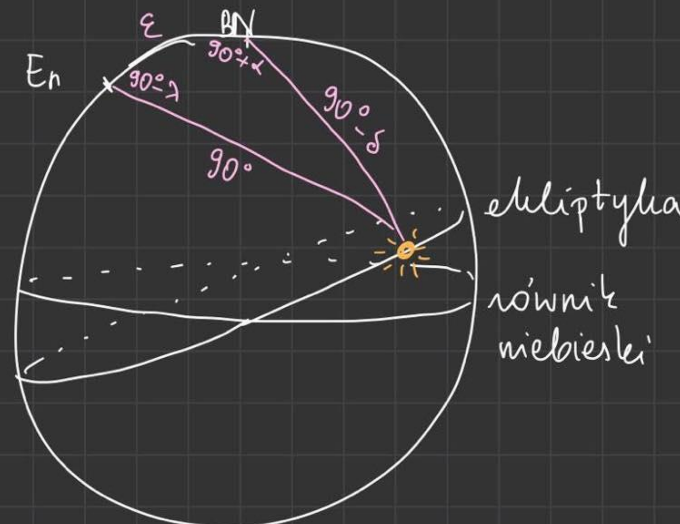
$$\sin(\delta) = \sin(\phi)\sin(h) + \cos(\phi)\cos(h)(-\cos(A))$$

$$\frac{-\sin(\delta) + \sin(\phi)\sin(h)}{\cos(\phi)\cos(h)} = \cos(A)$$

$$\underline{\underline{A = 131{,}12°}}$$

ZAD.

Długość ekliptyczna Słońca wynosi 30°. Oblicz jego rektascensję i deklinację.



Odp. Szerokość ekliptyczna Słońca zawsze równa się zeru, ponieważ porusza się ono wzdłuż koła wielkiego ekliptyki. Tw. cosinusów:

$$\cos(90°-\delta) = \underbrace{\cos(90°)}_{=0}\cos\varepsilon + \underbrace{\sin 90°}_{=1}\sin\varepsilon\cos(90°-\lambda)$$

$$\sin\delta = \sin\varepsilon\sin\lambda$$

$$\delta = 11{,}47° = \underline{\underline{11°28'12''}}$$

$$\underbrace{\cos 90°}_{=0} = \cos\varepsilon\cos(90°-\delta) + \sin\varepsilon\sin(90°-\delta)\cos(90°+\alpha)$$

$$-\cos\varepsilon\sin(\delta) = -\sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \operatorname{ctg}\varepsilon\operatorname{tg}\delta$$

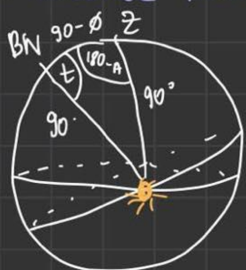
$$\alpha = 27{,}90° = \underline{\underline{1^h 51^m 48^s}}$$

2AD.

Oblicz kąt godzinny i azymut wschodu i zachodu Słońca w Chorzowie ($\phi = 50°18'20''$ N) podczas równo-nocy: wiosennej i jesiennej oraz przesilenia letniego i zimowego.

Odp. Wschód i zachód oznacza, że Słońce będzie miało $h=0°$ (bez refrakcji). Podczas równonocy wiosennej i jesiennej $\delta_\odot = 0°$, podczas przesilenia letniego $\delta_\odot = \varepsilon$, a podczas przesilenia zimowego $\delta_\odot = -\varepsilon$.

→ Równonoc wiosenna i jesienna, $\delta = 0°$.



$$\cos 90° = \cos 90° \cos(90° - \phi) + \sin 90 \sin(90° - \phi) \cos(t)$$

$$0 = \cos(\phi) \cos t$$

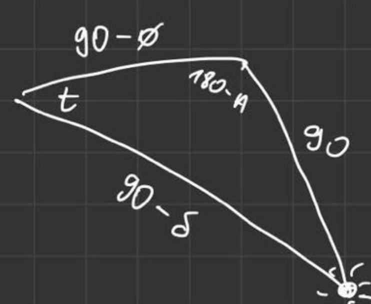
$$\cos t = 0 \Rightarrow \underline{\underline{t = 90° = \pm 6^h}}$$

$$\underbrace{\cos 90°}_{0} = \cos(90-\phi)\underbrace{\cos 90}_{0} + \sin(90-\phi)\sin 90 \cos(180-A)$$

$$\cos(180° - A) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A = \pm 90°}}$$

→ Przesilenie letnie, $\delta = \varepsilon$.

$$\underbrace{\cos 90°}_{0} = \cos(90° - \delta)\cos(90° - \phi) + \sin(90° - \delta)\sin(90° - \phi)\cos t$$



$$-\sin\delta \sin\phi = \cos\delta \cos\phi \cos t$$

$$\cos t = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\phi$$

$$\underline{\underline{t = 121{,}50° = \pm 8^h 6^m 0^s}}$$

$$\cos(90-\delta) = \cos(90-\phi)\cos 90 + \sin(90-\phi)\sin 90 \cos(180-A)$$

$$\sin\delta = \cos\phi(-\cos A)$$

$$\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\phi} = \underline{\underline{\pm 128{,}52°}}$$

→ Przesilenie zimowe, $\delta = -\varepsilon$, rachunki te same.

$$t = \pm 58{,}52° = \underline{\underline{\pm 3^h 54^m 5^s}}$$

$$A = \pm 51{,}48° = \underline{\underline{\pm 51° 28' 48''}}$$