

Zadania III etapu

Zadanie III.1

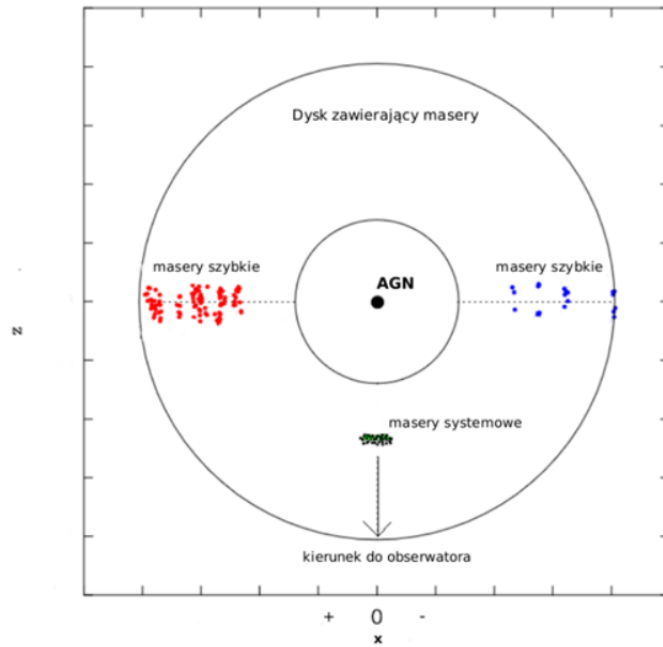
W galaktyce M106 wykryto dysk gazowy krążący wokół aktywnego jądra (AGN). Dysk zawiera wielką liczbę wodnych maserów emitujących promieniowanie w zakresie radiowym. Tworzą one megamaser, składający się z dwóch układów: maserów systemowych oraz maserów „szybkich”. Pierwszy układ znajduje się w jednakowej odległości R od AGN-u i ma prędkość radialną zbliżoną do prędkości AGN-u $v_0 = +465$ km/s. Drugi układ obserwowany jest po obu stronach AGN-u i charakteryzuje się ściśle keplerowską zależnością prędkości radialnej od odległości r do środka dysku: $v_r \sim r^{-1/2}$.

Rysunek 1 przedstawia schemat modelu masera widzianego z „góry” wraz z położeniem obu systemów maserów. Rysunek 2 przedstawia wyniki obserwacji megamasera w M106 wykonane za pomocą radiowej interferometrii wielkobazowej. Zaobserwowano, że masery systemowe wykazują liniową zależność prędkości radialnej od położenia x podanego w milisekundach łuku (mas). Nachylenie tej zależności, reprezentowanej przez prostą na rysunku 2, wynosi $\Omega=280$ km/s/mas. Ponadto zmierzono przyspieszenie dośrodkowe maserów systemowych równe $a=9,3$ km/s/rok.

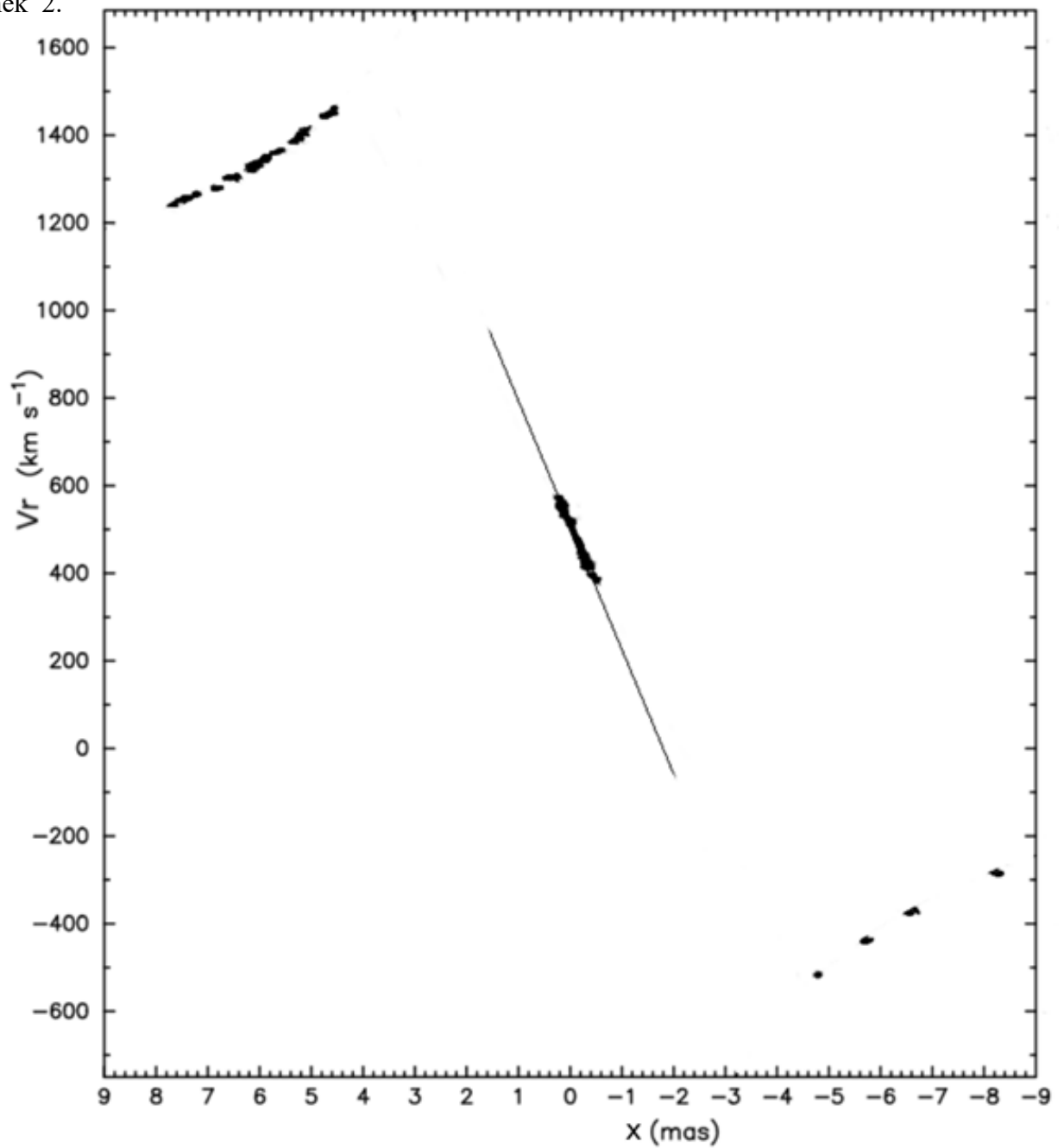
Posługując się modelem megamasera oraz danymi przedstawionymi na rysunku 2 wyznacz masę AGN-u (czarnej dziury) w masach Słońca oraz odległość do galaktyki M106 w megaparsekach. Możesz przyjąć upraszczające założenia:

- dysk jest płaski a AGN jest położony w jego centrum,
- kąt jaki tworzy płaszczyzna dysku z lokalną płaszczyzną nieba jest bliski 90° ,
- poprawki relatywistyczne są zaniedbywalne.

Rysunek 1.



Rysunek 2.



Rozwiązanie.

Keplerowska zależność ruchu maserów szybkich oznacza, że masa dysku jest pomijalnie mała w porównaniu z masą AGN-u M . Przyspieszenie dośrodkowe maserów systemowych jest równe ich przyspieszeniu grawitacyjnemu powodowanego przez AGN (czarną dziurę) $a=GM/R^2$.

Z pomiarów maserów szybkich znajdziemy kolejne równanie na nieznaną parametr grawitacyjny GM . Prędkość radialna maserów szybkich względem środka masy dysku wyznacza prędkości ich rotacji wokół AGN-u $v=v_r - v_0=(GM/r)^{1/2}$.

Z kolei $r=D\theta$, gdzie D to odległość do M106 a θ to odległość kątowa masera od AGN-u, skąd mamy, że $GM/D=\theta v^2=k^2=const$. Parametr k znajdziemy z rysunku 2. Dla czterech skrajnych maserów po obu stronach AGN-u mamy:

θ (mas)	$v = v_r - v_0$ (km/s)	$k=v\theta^{1/2}$
(-)4.8	465-(-525)=990	2169
(-)8.3	465-(-285)=750	2161
4.6	1460-465=995	2134
7.6	1240-465=775	2137
Średnia:		2150

Prędkość radialna maserów systemowych jest składową z-ową całkowitej prędkości maserów $v=(GM/R)^{1/2}$. Składowa ta jest równa $v_z=vx/R=vD\theta/R$. Jednak wielkość $v_z/\theta=\Omega=280$ km/s/mas, skąd mamy trzeci związek na parametr grawitacyjny: $\Omega^2=GMD^2/R^3$.

Ostatecznie mamy układ trzech równań na trzy niewiadome:

$$GM/R^2=a$$

$$GM/D=k^2$$

$$GMD^2/R^3=\Omega^2,$$

który łatwo rozwiązać.

$$\text{Rozwiązanie: } R=\Omega^{2/3}k^{4/3}a^{-1}, D=\Omega^{4/3}k^{2/3}a^{-1}, M=\Omega^{4/3}k^{8/3}(Ga)^{-1}.$$

Podstawiając dane i wykonując zamianę jednostek dostajemy:

$$R = 4.03 \cdot 10^{12} \text{ km} = 0.13 \text{ pc}$$

$$D = 2.07 \cdot 10^{20} \text{ km} = 6.7 \text{ Mpc}$$

$$M = 7.17 \cdot 10^{37} \text{ kg} = 3.6 \cdot 10^7 M_{\odot}$$

Zadanie III.2

Parametr Hubble'a opisuje tempo ekspansji Wszechświata i jest zdefiniowany jako:

$$H(t) = \frac{1}{a(t)} \frac{\Delta a(t)}{\Delta t}$$

gdzie $a(t)$ jest czynnikiem skali,

a $\Delta a(t)$ to zmiana czynnika skali w niewielkim odstępie czasu Δt .

Wartość parametru Hubble'a może się więc zmieniać wraz z upływem czasu. Powoduje to, że – w długiej skali czasowej – przesunięcia ku czerwieni odległych obiektów mogą się również zmieniać.

Poniższa tabela przedstawia wartości parametru Hubble'a w pewnym modelu kosmologicznym, które zmierzyliby obserwatorzy znajdujący się na różnych przesunięciach ku czerwieni.

z	$H(z)$ (km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹)
0	67,4
0,5	89,1
1,0	120,7
1,5	159,6
2,0	204,3

Zakładając poniższy model kosmologiczny, oblicz o ile zmieni się w ciągu 10 lat przesunięcie ku czerwieni pewnej galaktyki, która znajduje się obecnie na przesunięciu ku czerwieni $z = 1,000$ (jedną). Oblicz zmianę prędkości ucieczki tej galaktyki. Wynik podaj w cm/s.

Rozwiązanie

Korzystamy z definicji kosmologicznego przesunięcia ku czerwieni:

$$1 + z = \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{em}})}$$

Przesunięcie ku czerwieni odpowiadające interwałowi Δt_{obs} wynosi:

$$z(t_{\text{obs}} + \Delta t_{\text{obs}}) = \frac{a(t_{\text{obs}} + \Delta t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{em}} + \Delta t_{\text{em}})} - 1.$$

Korzystamy teraz z definicji parametru Hubble'a, żeby uprościć wyrażenia w liczniku i mianowniku:

$$a(t + \Delta t) = a(t) + \Delta t \frac{da}{dt} = a(t) + \Delta t H(t) a(t) = a(t)(1 + H(t)\Delta t),$$

skąd wynika, że:

$$\begin{aligned} z(t_{\text{obs}} + \Delta t_{\text{obs}}) &= \frac{a(t_{\text{obs}})(1 + H(t_{\text{obs}})\Delta t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{em}})(1 + H(t_{\text{em}})\Delta t_{\text{em}})} - 1 = \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{em}})} (1 + H(t_{\text{obs}})\Delta t_{\text{obs}} - H(t_{\text{em}})\Delta t_{\text{em}}) - 1 \\ &= (1 + z(t_{\text{obs}})) (1 + H(t_{\text{obs}})\Delta t_{\text{obs}} - H(t_{\text{em}})\Delta t_{\text{em}}) - 1, \end{aligned}$$

gdzie korzystamy z faktów, że $(1+x)^n \approx 1+nx$ oraz $(1+x)(1+y) \approx 1+x+y$ dla $x, y \ll 1$. Zmiana przesunięcia ku czerwieni wynosi więc:

$$\begin{aligned}\Delta z &= z(t_{\text{obs}} + \Delta t_{\text{obs}}) - z(t_{\text{obs}}) = (1 + z(t_{\text{obs}})) (1 + H(t_{\text{obs}})\Delta t_{\text{obs}} - H(t_{\text{em}})\Delta t_{\text{em}}) - 1 - z(t_{\text{obs}}) \\ &= (1 + z(t_{\text{obs}})) (H(t_{\text{obs}})\Delta t_{\text{obs}} - H(t_{\text{em}})\Delta t_{\text{em}}).\end{aligned}$$

Żeby uprościć to równanie zauważmy, że:

$$1 + z(t_{\text{obs}}) = \frac{\Delta t_{\text{obs}}}{\Delta t_{\text{em}}},$$

skąd:

$$\begin{aligned}\Delta z &= (1 + z(t_{\text{obs}})) (H(t_{\text{obs}})\Delta t_{\text{obs}} - H(t_{\text{em}})\Delta t_{\text{em}}) \\ &= (1 + z(t_{\text{obs}})) H(t_{\text{obs}})\Delta t_{\text{obs}} - H(t_{\text{em}})\Delta t_{\text{obs}},\end{aligned}$$

więc:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = (1 + z)H(t_{\text{obs}}) - H(t_{\text{em}}).$$

Podstawiając wartości liczbowe, mamy $\Delta z/\Delta t = 14,1 \text{ km/s/Mpc}$. Przyjmując $\Delta t = 10 \text{ lat}$, $\Delta z = 1,4 \times 10^{-10} = 4 \text{ cm/s}$.

Zadanie III.3

Cefeidy to klasa gwiazd zmiennych, które regularnie zmieniają jasność wskutek pulsacji. Pulsacje powodują okresowe zmiany temperatury efektywnej i promienia gwiazdy. W poniższych tabelach znajdują się pomiary prędkości radialnej i jasności w filtrach V i K pewnej cefeidy. Jej okres pulsacji wynosi 35,54804 dnia.

Pomiary prędkości radialnej

Lp	JD	v_r (km/s)	$\sigma(v_r)$ (km/s)
1	2449939,86	4,42	0,26
2	2450119,03	-6,61	0,37
3	2450497,79	14,33	0,27
4	2450505,52	18,38	0,29
5	2450526,73	3,32	0,27
6	2450530,69	10,20	0,27
7	2450534,60	15,43	0,28
8	2450536,59	17,19	0,28
9	2450796,73	-16,26	0,32
10	2450802,79	-11,77	0,28

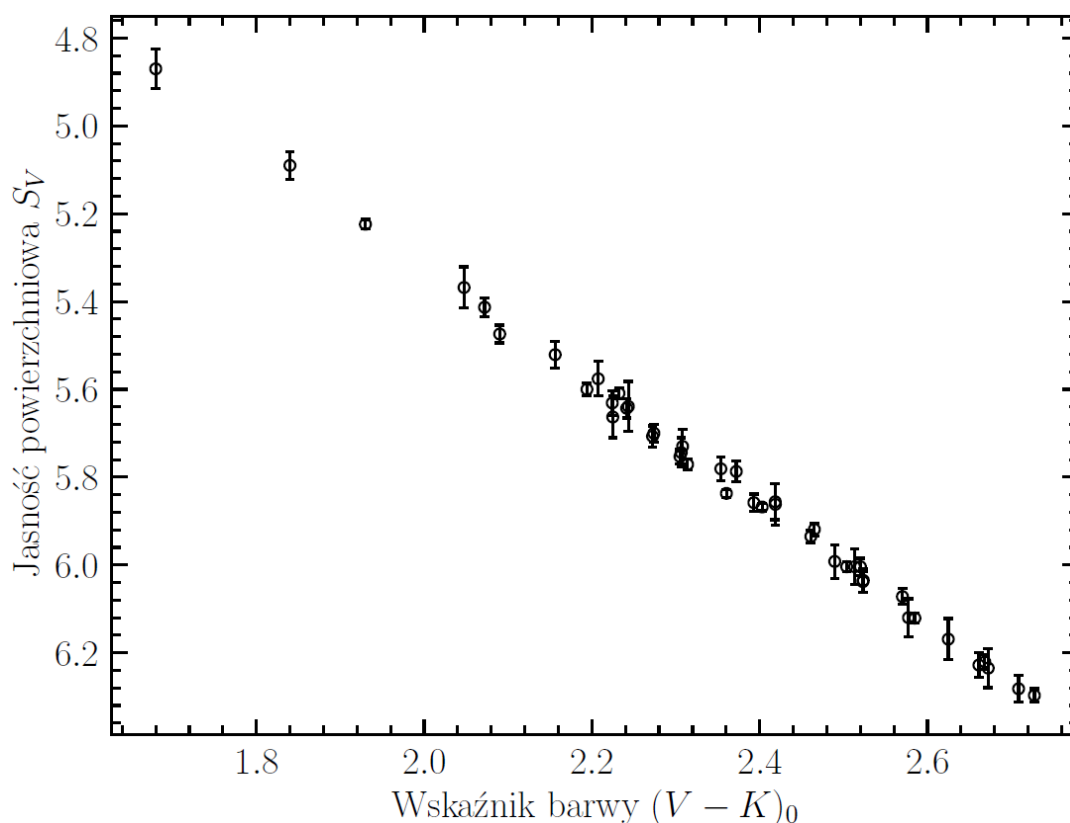
Pomiary jasności

Lp	JD	V_0 (mag)	K_0 (mag)
11	2452453,49	3,46	1,06
12	2452742,70	3,45	1,18
13	2452745,62	3,39	1,23
14	2452747,59	3,23	1,21
15	2452749,57	2,96	1,15
16	2452751,57	2,79	1,08
17	2452755,61	2,85	0,98
18	2452763,55	3,13	0,92
19	2452766,54	3,25	0,95
20	2452770,53	3,41	1,01

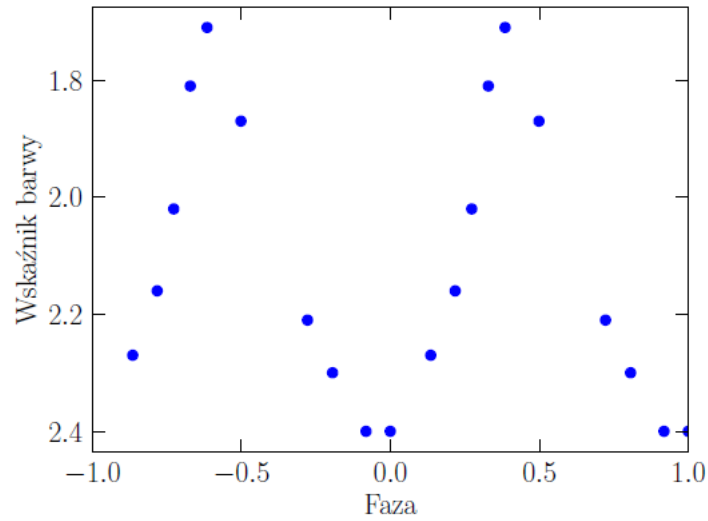
- Narysuj wykres przedstawiający zmiany wskaźnika barwy $(V-K)_0$ tej cefeidy w funkcji fazy pulsacji. Zaznacz, kiedy cefeida była najgorętsza.
- Narysuj wykres przedstawiający zmiany średnicy kątowej tej cefeidy w funkcji fazy pulsacji. Zaznacz, kiedy cefeida była największa.
- Wykorzystując pomiary prędkości radialnej, narysuj wykres przedstawiający jak promień cefeidy zmienia się z fazą pulsacji.
- Oblicz odległość do cefeidy.

Wskazówka:

Jasność powierzchniowa gwiazdy (w pewnym filtrze λ) jest zdefiniowana jako $S_\lambda = m_\lambda + 5 \log \theta$, gdzie m_λ jest wielkością gwiazdową w danym filtrze, a θ jest średnicą kątową gwiazdy wyrażoną w milisekundach łuku. Poniższy wykres przedstawia zależność między jasnością powierzchniową w filtrze V a wskaźnikiem barwy $(V-K)_0$.



Rozwiązanie a

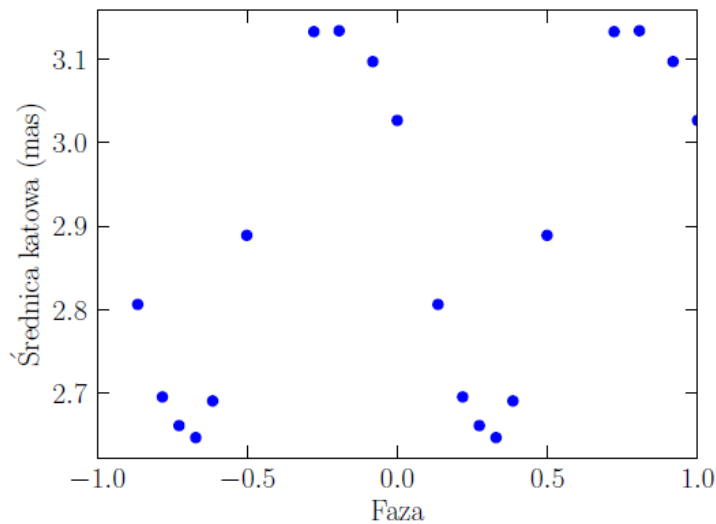


Obliczam fazę pulsacji (jest to część ułamkowa z dzielenia $(t - t_0)/P$, gdzie $t_0 = 2452453.49$, t_0 może być wybrane arbitralnie), a także wskaźnik barwy $(V - K)_0 = V_0 - K_0$.

Cefeida była najgorętsza kiedy jej kolor był najmniejszy (była najbardziej niebieska), tzn. podczas obserwacji nr 16.

Rozwiązanie b

Dopasowuję prostą do przedstawionej na rysunku zależności między wskaźnikiem barwy a jasnością powierzchniową $S_V = a((V - K)_0 - 2.2) + b$, gdzie $a = 1.342 \pm 0.014$ i $b = 5.5965 \pm 0.0037$. Można dopasować funkcję $S_V = a(V - K)_0 + b$, ale wtedy wyraz wolny jest obciążony większym błędem ($b = 2.644 \pm 0.033$). Na tej podstawie obliczam jasność powierzchniową dla każdej obserwacji, a następnie średnicę kątową gwiazdy. Cefeida była największa podczas obserwacji nr 18 i 19.



Epoch	Phase	$(V - K)_0$	S_V	θ (mas)
11	1,000	2,40	5,86	3,03
12	0,136	2,27	5,69	2,81
13	0,218	2,16	5,54	2,70
14	0,273	2,02	5,35	2,66
15	0,329	1,81	5,07	2,65
16	0,385	1,71	4,94	2,69
17	0,499	1,87	5,15	2,89
18	0,722	2,21	5,61	3,13
19	0,806	2,30	5,73	3,13
20	0,918	2,40	5,86	3,10

Table 1: Tabela do części a i b

Rozwiązanie c, d

Z definicji, predkość radialna cefeidy to

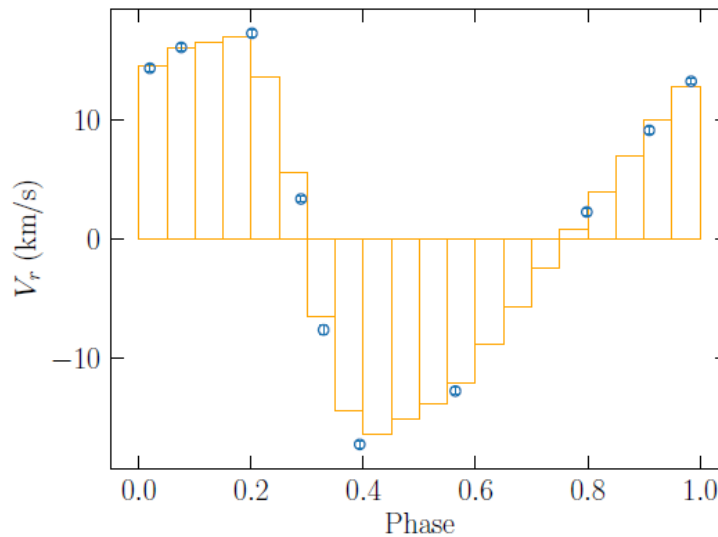
$$V_r = \frac{dR}{dt} + V_{r,0},$$

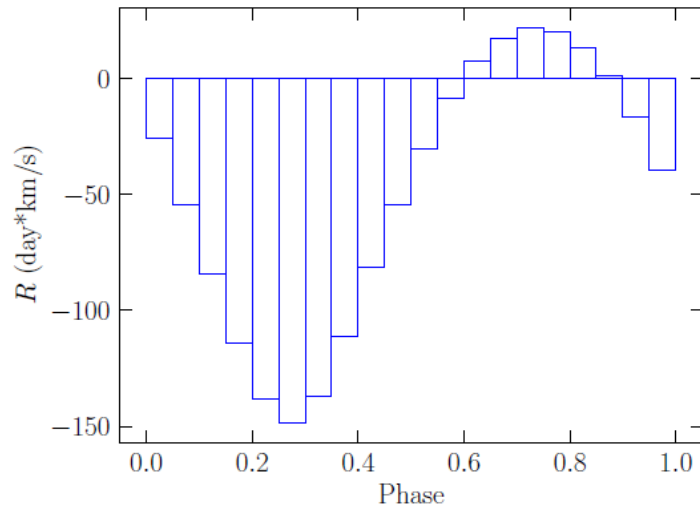
gdzie $V_{r,0}$ to średnia prędkość radialna cefeidy. Z tabelki można odczytać, że minimalna prędkość radialna cefeidy wynosi $-16,26$ km/s, a maksymalna to $18,38$ km/s. Średnia prędkość jest więc bliska 0 km/s. (Formalnie można ją oszacować na $(18,38 - 16,26)/2 = 1,06$ km/s).

Zmianę promienia cefeidy w czasie otrzymujemy przez scałkowanie krzywej prędkości radialnej. Na podstawie poniższych wykresów można zauważyć, że cefeida była najmniejsza podczas fazy 0.3, a największa – podczas fazy 0.7. To zgadza się z otrzymanym wykresem zmian promienia kąowego w punkcie b.

Całkowita zmiana promienia wynosi $\Delta R = 170$ dni * km/s = 1.5×10^7 km.

Z kolei promień kąowy zmienił się o $\Delta\theta = (3,13 - 2,65)/2 = 0,24$ mas. Zatem odległość do cefeidy wynosi $d = \Delta R/\Delta\theta = 420$ pc.





Zadanie III.4a

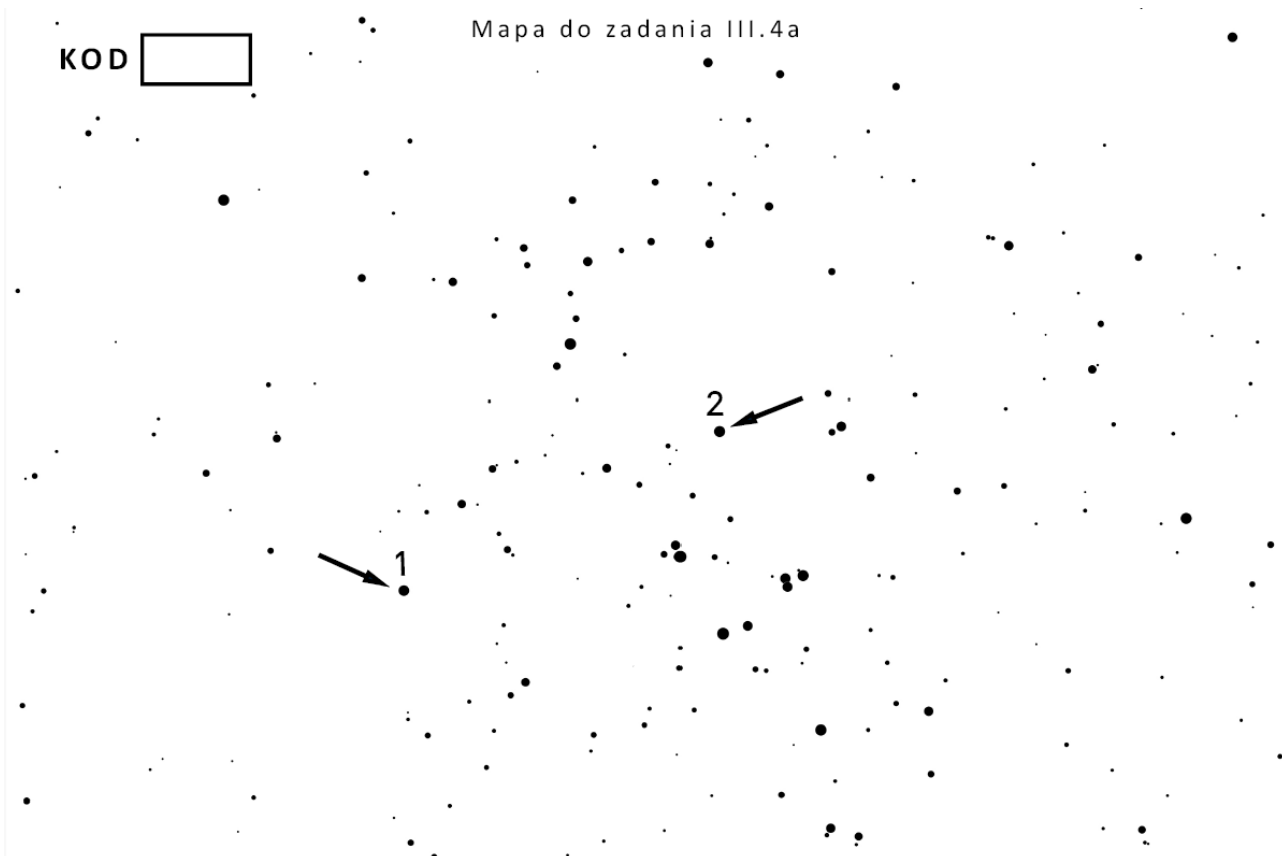
Do dyspozycji masz mapkę gromady otwartej M44 (Praesepe, w gwiazdozbiorze Raka) i *Obrotową Mapę Nieba*. Na podstawie obserwacji tej gromady, przeprowadzonej za pomocą teleskopu zwierciadłowego na montażu azymutalnym:

- określ orientację gromady, rysując na mapce strzałki wskazujące kierunek północny (N), wschodni (E) oraz pion(G),
- zaznacz krzyżykami położenia trzech jasnych gwiazd gromady, których brakuje na mapce. Jasność brakujących gwiazd jest zbliżona do jasności gwiazd wskazanych strzałkami.
- wyznacz kątową średnicę pola widzenia teleskopu i oceń przybliżone rozmiary katowe tej gromady,

Na załączonej mapce gromady M44 strzałki wskazują dwie gwiazdy o znanych współrzędnych równikowych: $\alpha_1 = 8^{\text{h}} 41,8^{\text{m}}$; $\delta_1 = +19^{\circ} 52'$ i $\alpha_2 = 8^{\text{h}} 39,7^{\text{m}}$; $\delta_2 = +19^{\circ} 47'$. Oś lunety celowniczej nie jest zgrana z osią teleskopu.

KOD

Mapa do zadania III.4a



Zadanie III.5

W styczniu 2024 roku ogłoszono odkrycie pulsara milisekundowego znajdującego się w układzie podwójnym z niewidocznym towarzyszem. Zauważono, że sygnały radiowe pochodzące od pulsara nie dochodzą w równych odstępach czasu, lecz są opóźnione lub przyspieszone względem średniej o maksymalnie 27,8 s. Okres orbitalny pulsara wynosi 7,44 dnia.

Na podstawie obserwacji efektów relatywistycznych w tym układzie podwójnym, stwierdzono, że całkowita masa układu wynosi $3,887M_{\odot}$.

Wiedząc, że masa pulsara znajduje się w przedziale $1,17 M_{\odot} \leq M_p \leq 1,79 M_{\odot}$ i zakładając, że jego orbita jest okręgiem, podaj możliwy zakres nachylenia orbity do płaszczyzny stycznej do sfery niebieskiej.

Czym może być niewidoczny towarzysz pulsara?

Propozycja rozwiązania

Niech m_p oznacza masę pulsara, a m_c masę towarzysza. Wiemy, że $m_p + m_c = 3,887M_{\odot}$. Korzystając z trzeciego prawa Keplera możemy wyznaczyć wielką półoś (orbity względnej) układu:

$$\frac{G(m_p + m_c)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{P^2}.$$

Jeżeli wyrażę masy w masach Słońca, odległość w jednostkach astronomicznych, a okres orbitalny - w latach, to:

$$a = P^{2/3}(m_p + m_c)^{1/3} = 0,1173 \text{ au}.$$

Obserwowane opóźnienie pulsów radiowych pochodzących od badanego pulsara wynika z jego ruchu orbitalnego **względem środka masy układu**. Jeżeli przez i oznaczę nachylenie orbity pulsara do płaszczyzny nieba, to obserwowane opóźnienie jest powiązane z promieniem orbity pulsara względem środka masy a_p :

$$\Delta t = \frac{a_p \sin i}{c},$$

skąd wynika, że $a_p \sin i = c\Delta t = 0,0557 \text{ au}$.

Promień orbity pulsara względem środka masy możemy powiązać z promieniem orbity względnej:

$$a_p = \frac{m_c}{m_p + m_c} a.$$

Mnożąc obie strony tego równania przez $\sin i$ i grupując czynniki otrzymujemy:

$$m_c \sin i = \frac{a_p \sin i}{a} (m_p + m_c) = 1,846 M_{\odot}.$$

Wiemy, że $1,17 \leq m_p \leq 1,79 M_{\odot}$. To daje nam ograniczenia na nachylenie orbity pulsara:

$$m_p = 3,887 M_{\odot} - m_c = 3,887 M_{\odot} - \frac{1,846 M_{\odot}}{\sin i}.$$

Z warunku $m_p \geq 1,17 M_{\odot}$ wynika, że $\sin i \geq 0,679$. Z kolei z warunku $m_p \leq 1,79 M_{\odot}$ wynika, że $\sin i \leq 0,880$. Zatem $43^{\circ} \leq i \leq 62^{\circ}$.

Ponieważ $m_c \sin i = 1,846 M_{\odot}$, to $2,10 \leq m_c \leq 2,72 M_{\odot}$. Towarzyszem może być więc obiekt w "przerwie masowej" między gwiazdami neutronowymi: masywna gwiazda neutronowa lub czarna dziura.

Zadanie III.6 - zadanie planetaryjne**KOD ZAWODNIKA _____.**

Zadanie będzie polegało na obserwacji sztucznego nieba w sali projekcyjnej. Po przejściu na salę i zajęciu wskazanych miejsc aparatura wyświetli dwie projekcje związane z dwoma częściami zadania (po około 10 minut). W trakcie obu części wyświetlany będzie czas lokalny. Odpowiedzi można będzie uzupełnić po powrocie do sali egzaminacyjnej.

W czasie projekcji można posługiwać się czerwonym światłem ale skierowanym wyłącznie w dół! Można wstawać z fotela ale bez zmieniania miejsca. Należy zachować ciszę w czasie przejścia oraz w czasie projekcji. Prosimy o niekorzystanie z toalety w czasie części planetaryjnej. Odpowiedzi prosimy zapisać na tej kartce!

Część A - Pokazano niebo z dnia 23 III 2004 roku

Zaprezentowany zostanie naturalny widok nieba z Ziemi od zachodu Słońca do północy. W poniższej tabeli wpisz zaobserwowane planety oraz określ gwiazdozbiór, na tle którego daną planetę widać. Należy podać nazwę polską lub skrót IAU nazwy łacińskiej.

Planeta	Gwiazdozbiór
Merkury	Psc
Wenus	Ari
Mars	Tau
Jowisz	Leo
Saturn	Gem

Część B

Na czarnym niebie (bez gwiazd i atmosfery) zostaną wyświetlone pewne linie związane z astronomią sferyczną i ruchem ciał w przestrzeni kosmicznej oraz południk lokalny ze skalą. Należy zidentyfikować wszystkie linie. Prezentacja będzie obejmować jedną dobę.

Linia:	Identyfikacja (nazwa lub opis)
A	Równik niebieski
B	Ekliptyka
C	Orbita Księżyca
D	Koło precesji
E	Równik Galaktyki